שיעור מס' 11:

אנחנו בוחנים את המודל הבא:

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{2i} + \varepsilon_i$$

$$\underset{\hat\beta_0, \hat\beta_1, \hat\beta_2}{Min} \sum \hat\varepsilon_i^2 = \sum (Y_i - \hat\beta_0 - \hat\beta_1 X_{1i} - \hat\beta_2 X_{2i})^2$$

$$\frac{d Min}{d \hat\beta_0} = \cancel{2 \cdot (-1)} \sum (Y_i - \hat\beta_0 - \hat\beta_1 X_{1i} - \hat\beta_2 X_{2i}) = 0 \Rightarrow \sum \hat\varepsilon_i = 0 \quad (I)$$

נחשב את $\hat\beta_0$:

$$\sum Y_i - \sum \hat\beta_0 - \sum \hat\beta_1 X_{1i} - \sum \hat\beta_2 X_{2i} = 0$$

$$\cancel{n}\bar Y - \hat\beta_1 \cancel{n} \bar X_1 - \hat\beta_2 \cancel{n} \bar X_2 = \cancel{n} \hat\beta_0$$

$$\boxed{\hat\beta_0 = \bar Y - \hat\beta_1 \bar X_1 - \hat\beta_2 \bar X_2} \Rightarrow$$

גם כאן קו הרגרסיה עובר דרך נק' הממוצעים

עכשיו נחשב את $\hat\beta_1$:

$$\frac{d Min}{d \hat\beta_0} = (-2) \cdot \sum (Y_i - \hat\beta_0 - \hat\beta_1 X_{1i} - \hat\beta_2 X_{2i})(X_{1i}) = 0 \Rightarrow \sum (\hat\varepsilon_i X_{1i}) = 0$$

נציב $\hat\beta_0$

$$\Rightarrow \sum \left(Y_i - (\bar Y - \hat\beta_1 \bar X_1 - \hat\beta_2 \bar X_2) - \hat\beta_1 X_{1i} - \hat\beta_2 X_{2i} \right)(X_{1i}) = 0$$

$$\Rightarrow \sum \left([Y_i - \bar Y] - \hat\beta_1 [X_{1i} - \bar X_1] - \hat\beta_2 [X_{2i} - \bar X_2] \right) X_{1i} = 0$$

הגדרות:

$$M_{Y1} = \sum (Y_i - \bar{Y})(X_{1i} - \bar{X}_1) = \sum (Y_i - \bar{Y}) X_{1i} = \sum (X_{1i} - \bar{X}_1) Y_i$$

$$= \hat{Cov}(Y, X_1) \cdot (n-1)$$

$$M_{11} = \sum (X_{1i} - \bar{X}_1)^2 = \sum (X_{1i} - \bar{X}_1) X_{1i} = \hat{V}ar(X_1) \cdot (n-1)$$

$$M_{12} = \ldots$$

לכן אנחנו מקבלים ש:

$$M_{Y1} - \hat{\beta}_1 M_{11} - \hat{\beta}_2 M_{12} = 0$$

$$\boxed{\Rightarrow \hat{\beta}_1 = \frac{M_{Y1} - \hat{\beta}_2 M_{12}}{M_{11}}}$$

באופן סימטרי נחלץ את $\hat{\beta}_2$:

$$\frac{\partial Min}{\partial \hat{\beta}_2} : \sum \left([Y_i - \bar{Y}] - \hat{\beta}_1 [X_{1i} - \bar{X}_1] - \hat{\beta}_2 [X_{2i} - \bar{X}_2] \right) X_{2i} = 0$$

$$M_{Y2} - \hat{\beta}_1 M_{12} - \hat{\beta}_2 M_{22} = 0$$

$$\boxed{\Rightarrow \hat{\beta}_2 = \frac{M_{Y2} - \hat{\beta}_1 M_{12}}{M_{22}}}$$

2 משוואות ב-2 נעלמים ....

3

פותרים ומקבלים:

$$\hat{\beta}_1 = \frac{M_{22} M_{Y1} - M_{12} M_{Y2}}{M_{11} M_{22} - M_{12}^2} \quad ; \quad \hat{\beta}_2 = \frac{M_{11} M_{Y2} - M_{12} M_{Y1}}{M_{11} M_{22} - M_{12}^2}$$

שאלה ← מה קורה אם אין מתאם בין X_1 לבין X_2?

$$\hat{Cov}(X_1, X_2) = 0 \Rightarrow M_{12} = 0$$

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\cancel{M_{22}} M_{Y1} - 0}{M_{11} \cancel{M_{22}} - 0} = \frac{M_{Y1}}{M_{11}} = \frac{\hat{Cov}(X_1, Y)}{\hat{Var}(X_1)}$$

ובאותו אופן

$$\hat{\beta}_2 = \frac{\cancel{M_{11}} M_{Y2} - 0}{\cancel{M_{11}} M_{22} - 0} = \frac{M_{Y2}}{M_{22}} = \frac{\hat{Cov}(X_2, Y)}{\hat{Var}(X_2)}$$

בגודל השפעה במקרה של משתנה מסביר אחד

עכשיו נראה את הקשר בין $\hat{\beta}_1$ לבין β_1:

$$\hat{\beta}_1 = \frac{M_{22} M_{Y1} - M_{12} M_{Y2}}{M_{11} M_{22} - M_{12}^2} \xrightarrow[\text{נפרק במקומות את } Y]{} = \frac{M_{22} \cdot \sum (X_1 - \bar{X}) Y_i - M_{12} \cdot \sum (X_2 - \bar{X}) Y_i}{M_{11} M_{22} - M_{12}^2}$$

$$= \frac{\sum \left[M_{22} (X_{1i} - \bar{X}_1) - M_{12} (X_{2i} - \bar{X}_2) \right] \cdot (\overbrace{\beta_0 + \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{2i} + \varepsilon_i}^{Y_i})}{M_{11} M_{22} - M_{12}^2}$$

נפתח ל4 חלקים $=$

$$① \quad = \left(\beta_0 \cdot \frac{\sum \left[M_{22}(x_{1i} - \bar{x}_1) - M_{12}(x_{2i} - \bar{x}_2) \right]}{M_{11}M_{22} - M_{12}^2} \right) \rightarrow \text{צריך להתאפס}$$

$$② \quad + \left(\beta_1 \cdot \frac{\sum \left[M_{22}(x_{1i} - \bar{x}_1) - M_{12}(x_{2i} - \bar{x}_2) \right] x_{1i}}{M_{11}M_{22} - M_{12}^2} \right) \rightarrow \text{צריך להצטמצם ל-}\beta_1!$$

$$③ \quad + \left(\beta_2 \cdot \frac{\sum \left[M_{22}(x_{1i} - \bar{x}_1) - M_{12}(x_{2i} - \bar{x}_2) \right] x_{2i}}{M_{11}M_{22} - M_{12}^2} \right) \rightarrow \text{צריך להתאפס}$$

$$④ \quad + \left(\frac{\sum \left[M_{22}(x_{1i} - \bar{x}_1) - M_{11}(x_{2i} - \bar{x}_2) \right] \varepsilon_i}{M_{11}M_{22} - M_{12}^2} \right) \rightarrow \text{מה שנשאר}$$

אנחנו רוצים להראות ש: $\hat{\beta}_1 = \beta_1 + \sum_{i=1}^{n} \boxed{}\, \varepsilon_i$

$$① \quad = \beta_0 \cdot \left[M_{22} \underbrace{\sum (x_{1i} - \bar{x}_1)}_{0} + M_{12} \underbrace{\sum (x_{2i} - \bar{x}_2)}_{0} \right] = 0$$

$$② \quad = \beta_1 \cdot \frac{\left[M_{22} \overbrace{\sum (x_{1i} - \bar{x}_1) x_{1i}}^{M_{11}} - M_{12} \cdot \overbrace{\sum (x_{2i} - \bar{x}_2) x_{1i}}^{M_{21}} \right]}{M_{11}M_{22} - M_{12}^2}$$

$$= \beta_1 \frac{\left[M_{22} \cdot M_{11} - M_{12}^2 \right]}{\left[M_{11}M_{22} - M_{12}^2 \right]} = \beta_1$$

$$\textcircled{3} \quad = \frac{\beta_2 \left[M_{22} \overbrace{M_{12}}^{\sum (X_{1i}-\bar{X}_1) X_{2i}} - M_{12} \overbrace{M_{22}}^{\sum (X_{2i}-\bar{X}_2) X_{2i}} \right]}{M_{11} M_{22} - M_{12}^2} = \underline{\underline{0}}$$

④ נשאר וו

$$\Rightarrow \hat{\beta}_1 = \beta_1 + \frac{\sum \left[M_{22} (X_{1i} - \bar{X}_1) - M_{12} (X_{2i} - \bar{X}_2) \right] \varepsilon_i}{M_{11} M_{22} - M_{12}^2}$$

עכשיו אפשר להראות שהאומד הוא חסר הטיה (אם הקבועים ← M הקבועים)

$$E(\hat{\beta}_1) = \beta_1 + E\Big(\sum \underbrace{\square}_{\downarrow} \varepsilon_i\Big) = \sum \square \underbrace{E(\varepsilon_i)}_{=0} \rightarrow$$

לכן אומד חסר הטיה!

משקלת קבועה בכל מדגם עפ״י הנחת חוסר סטוכסטיות.

עפ״י ההנחה הראשונה

(שימו לב ← $\hat{\beta}_2$ ← הכל סימטרי)

עכשיו נחשב את השונות של $\hat{\beta}_1$:

$$Var(\hat{\beta}_1) = E(\hat{\beta}_1 - E(\hat{\beta}_1))^2 = E(\hat{\beta}_1 - \beta_1)^2$$

$$= E\left(\frac{\sum \left[M_{22} (X_{1i} - \bar{X}_1) - M_{12} (X_{2i} - \bar{X}_2) \right] \varepsilon_i}{M_{11} M_{22} - M_{12}^2} \right)^2$$

$$= \left[\frac{1}{M_{11}M_{22}-M_{12}^2}\right]^2 \cdot E\left[\overbrace{M_{22}\sum(x_{1i}-\bar{x}_1)\varepsilon_i}^{a} - \overbrace{M_{12}\sum(x_{2i}-\bar{x}_2)\varepsilon_i}^{b}\right]^2$$

$$= [\ \ ]^2 \cdot E\Big(M_{22}^2 \sum(x_{1i}-\bar{x}_1)^2\varepsilon_i^2 + M_{12}^2 \sum(x_{2i}-\bar{x}_2)^2\varepsilon_i^2$$

$$-2M_{22}\cdot M_{12}\cdot \boxed{\text{משהו}}\Big)$$

נראה מה זה ה"משהו" הזה:

$$\left[(x_{1,1}-\bar{x}_1)\varepsilon_1 + (x_{1,2}-\bar{x}_1)\varepsilon_2 + (x_{1,3}-\bar{x}_1)\varepsilon_3\right]\cdot$$

$E(\varepsilon_i\varepsilon_j)=0$ ← מצטלבים מתאפסים

$$\left[(x_{2,1}-\bar{x}_2)\varepsilon_1 + (x_{2,2}-\bar{x}_2)\varepsilon_2 + (x_{2,3}-\bar{x}_2)\varepsilon_3\right]$$

לכן נשאר רק עם מכפלות עם אותו אפסילון!

$$= [\ \ ]^2 \cdot E\Big(M_{22}^2 \overbrace{\sum(x_{1i}-\bar{x}_1)^2}^{M_{11}}\varepsilon_i^2 + M_{12}^2 \overbrace{\sum(x_{2i}-\bar{x}_2)^2}^{M_{22}}\varepsilon_i^2$$

$$-2M_{22}M_{12}\cdot \overbrace{\sum(x_{1i}-\bar{x}_1)(x_{2i}-\bar{x}_2)}^{M_{12}}\varepsilon_i^2\Big)$$

נשארים קבועים   נשארים קבועים   כנ"ל

$$= \left[\frac{1}{M_{11}M_{22}-M_{12}^2}\right]^2 \cdot E\left[M_{22}^2M_{11}\varepsilon_i^2 + M_{12}^2M_{22}\varepsilon_i^2 - 2M_{22}M_{12}^2\cdot\varepsilon_i^2\right]$$

$$= \left[\frac{1}{M_{11}M_{22}-M_{12}^2}\right]^2 \left[M_{22}^2M_{11}\overbrace{E(\varepsilon_i^2)}^{\sigma_\varepsilon^2} - M_{22}M_{12}^2\overbrace{E(\varepsilon_i^2)}^{\sigma_\varepsilon^2}\right]$$

$$= \left[\frac{1}{M_{11}M_{22}-M_{12}^2}\right]^{\cancel{2}} \cdot \cancel{M_{22}\left[M_{11}M_{22}-M_{12}^2\right]} \cdot \sigma_\varepsilon^2$$

$$\Rightarrow \boxed{Var(\hat\beta_1) = \frac{\sigma_\varepsilon^2 \cdot M_{22}}{M_{11}M_{22}-M_{12}^2}}$$

נסביר לביטוי
יותר אינטואיטיבי

נחלק ב M_{22}
את המונה והמכנה

$$Var(\hat\beta_1) = \frac{\sigma_\varepsilon^2 \cdot 1}{M_{11}\cdot 1 - \frac{M_{12}^2}{M_{22}}} = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{M_{11}\left[1-\frac{M_{12}^2}{M_{22}M_{11}}\right]}$$

$$R^2_{2,1} = R^2_{1,2} = \rho^2_{1,2}$$

מדד טיב
ההתאמה
שמתקבל מרגרסיה
של x_1 על x_2

$$\Rightarrow \boxed{Var(\hat\beta_1) = \underbrace{\frac{\sigma_\varepsilon^2}{\sum(x_{1,i}-\bar{x}_1)^2}}_{} \cdot \underbrace{\frac{1}{1-R^2_{1,2}}}_{}}$$

החלק הזה
הוא בדיוק
השונות של המקדם של x_1
כאשר מריצים רגרסיה
רק אותו.

התוספת

נקודה חשובה:

* השונות של $\hat\beta_2$ – סימטרי
* אם אין מתאם בין x_1, x_2 ← חוזרים לשונות של משתנה מסביר אחד.
* ככל שהקשר חזק יותר בין המשתנים המסבירים השונות של האומדים גבוהה. קשה יותר לאמוד את ההשפעה הנפרדת.

* חומר למחשבה ← מה קורה לשונות האומד כשמוסיפים משתנים מסבירים? בהכרח עולה

← מה קורה לאומד לשונות האומד?

* אם יש k משתנים מסבירים:

$$Var(\hat{\beta}_j) = \frac{\sigma^2_\varepsilon}{M_{jj}} \cdot \underbrace{\frac{1}{1-R^2_{j,i\neq j}}}$$

R^2 שמתקבל מרגרסיה של x_j על כל יתר המשתנים המסבירים.

* ← האומד לשונות של ε ברגרסיה עם משתנה מסביר אחד:

$$\hat{\sigma}^2_\varepsilon(1) = \frac{\sum(Y_i - \hat{\alpha} - \hat{\beta}X_i)^2}{n-2}$$

← וברגרסיה עם 2 משתנים מסבירים:

$$\hat{\sigma}^2_\varepsilon(2) = \frac{\sum(Y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 X_{1i} - \hat{\beta}_2 X_{2i})^2}{n-3}$$

מספר המשתנים המסבירים + 1
או ← מספר הפרמטרים

$\hat{\sigma}_\varepsilon(1) \neq \hat{\sigma}_\varepsilon(2) \Leftarrow$

האומד לשונות וגם של האומדים [illegible] ברגרסיה מרובה ורגרסיה עם מסביר אחד.

והאומד לשונות
* השונות האמיתית ~~[illegible]~~ זהה רק אם $M_{12}=0$

* מולטיקולינאריות מלאה ← מה קורה כאשר יש קשר לינארי מושלם בין x_1 לבין x_2: $x_1 = ax_2 + b$ (או $|\rho_{1,2}|=1$)

← בעצם אי אפשר לבודד את ההשפעה הנפרדת של x_1 ו-x_2
זה בעצם אותו משתנה!

$$Var(\hat{\beta}_1) = \frac{\sigma^2_\varepsilon}{\dots} \cdot \frac{1}{1-R^2_{12}} \to \infty$$

אפשר לראות זאת בשתי דרכים:
$\to 1$ (I)

פרק II : פרק המשוואות הנורמליות

(I) $\sum \hat{\varepsilon}_i = 0$

(V) $\sum \hat{\varepsilon}_i x_{1i} = 0 \Rightarrow \sum \hat{\varepsilon}_i (a x_2 + b) = a \sum \hat{\varepsilon}_i x_{2i} + b \underbrace{\sum \hat{\varepsilon}_i}_{=0,\ I} = 0$

(III) $\underbrace{\sum \hat{\varepsilon}_i x_{2i} = 0}_{\text{מתקיים}}$

משוואה שמתקיימת כבר ירדה

רק 2 משוואות ←
3 נעלמים
← אינסוף פתרונות.

אמפיריקה: מולטיקולינאריות חלקית ← $1 > |r_{1,2}| > 0.8$ (בע"כ)

דוגמא ← מחיר של בנזין משתנה תלוי ← מה משפיע לאנס מטוס

יש מתח בין רגרסיה עם הרבה משתנים ← לבין יכולת לאמוד אמפירית

1. נדיר למצוא אומדים לבטא (רווחן)
2. שונות האומדים (גם האומדים) יהיו גבוהות ← קשה לנו לבחון השערות אפס לגבי השפעה חלקית
3. קשה יהיה לבחון השערות אפס.
4. במקרים רבים משתמשים במבחן F → מובהקות הרגרסיה.

אבל! הכי גרוע זה להשמיט משתנה רלוונטי.

דוגמאות (רמז לשיעורי בית...)

(5) דוגמא עם x, x^2 ← האם מולטיקולינאריות מלאה?

(6) פרשנות למקדמים

(7) טיפול עם $\hat{\varepsilon}$ ומקדמים.

(8) עבודה עם דמה לינארי

(9)