1

מתאם סדרתי במודלי אורך (מודלים דינמיים): ← כאשר עוסקים במודלים של סדרי זמן. חייבים לקחת בחשבון שהעבר יכול להשפיע על ההווה, גם במונח ההפרעה.

(1) מתאם סדרתי כאשר המשתנה התלוי הוא גם משתנה מסביר ($Cov(y_t, y_{t-s}) \neq 0$)

(2) מתאם סדרתי בהפרעה האקראית $Cov(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-s}) \neq 0$ ← הנחה III אינה מתקיימת

אולי אין צורך. זה עובר בסעיף

מה קורה כאשר מנסים לאמוד מודל כזה:

$$y_t = \alpha + \beta y_{t-1} + \varepsilon_t$$ → (יכולים להיות עוד משתנים מסבירים חוץ מ-y_{t-1})

כמובן שהמשתנה הזה אינו דטרמיניסטי
הוא מכיל את ההפרעה האקראית ε_{t-1}

* האומד לפי ה-OLS הוא מוטה אך עקיב
במידה ומתקיים כי: $Cov(y_{t-1}, \varepsilon_t) = 0$ (א)

* נראה כי קיים מתאם סדרתי לא רצוי נוסף במודל כזה:
(אפילו כאשר ε_t אינו מתואם עם y_{t-1}).
שימו לב שלא הנחנו כי
$Cov(\varepsilon_t, y_{t-2}) = 0$

$$\boxed{\varepsilon_{t-1} = y_{t-1} - \alpha - \beta y_{t-2}}$$

$$\boxed{Cov(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-1})} = Cov(\varepsilon_t, y_{t-1} - \alpha - \beta y_{t-2}) = \boxed{-\beta\, Cov(\varepsilon_t, y_{t-2})}$$

$=0$

0 מתוך הנחה (א')

לא הנחנו ש- זה אפס

לכן יתכן מצב של מתאם סדרתי במודל כזה ← האומדים עקיבים, אבל תהיה לנו בעיה באמידת השונויות.

באופן כללי אנחנו נראה שמתאם סדרתי לא פוגע בעקביות כאשר

מפגר במקרה הבא:

$y_t=\beta_0+\beta_1 X_t+\varepsilon_t \quad , \quad cov(\varepsilon_t,\varepsilon_{t-1})\neq 0$ ← אומדים עקביים אבל לא יעילים והשונויות מוטות.

אבל: כאשר:

$y_t=\alpha+\beta y_{t-1}+\varepsilon_t \quad , \quad \varepsilon_t=\rho\varepsilon_{t-1}+e_t$ נאמר,

$(AR(1))$

$E(e_t|\varepsilon_{t-1},\varepsilon_{t-2},\ldots)=E(e_t|y_{t-1},\ldots)=0$

$cov(\underline{y_{t-1},\varepsilon_t})=cov(y_{t-1},\rho\varepsilon_{t-1}+e_t)=\boxed{\rho\, cov(y_{t-1},\varepsilon_{t-1})}$

השאלה הכי חשובה שתמיד שואלים ← האם המשתנה הזה מתואם עם ההפרעה המקרית?

קיים קשר ישיר בין ההפרעה המקרית ε_{t-1} לבין ה-y_{t-1}.

לכן במקרה המיוחד של y_{t-1} כמשתנה

מסביר ← יש לנו בעיה של חוסר עקביות של האומדים.

וגם כאשר יש מתאם סדרתי נוסף:

$\varepsilon_t=\rho\varepsilon_{t-1}+e_t$

שימו לב ← בעצם מה שזה אומר לנו הוא שהמודל

הנכון הוא:

$y_t=\beta_0+\beta_1 y_{t-1}+\beta_2 y_{t-2}+\varepsilon_t$

אם נציב את זה

$y_t=\alpha+\beta y_{t-1}+\varepsilon_t \quad (\rho\varepsilon_{t-1}+e_t) \Leftarrow$

$y_t=\alpha+\beta y_{t-1}+\rho(y_{t-1}-\alpha-\beta y_{t-2})+e_t$

$\boxed{y_t=\alpha(1-\rho)+(\beta+\rho)y_{t-1}-\rho\beta y_{t-2}+e_t}$

3

נניח ונעסוק במודל הדוגמאי הבא:

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 x_t + \varepsilon_t$$

וכמו כן מתקיים:

מה עם כזה מצב שסביר שיקרה? אם יש לי טעות חיובית, ככל שהמרחק בין התקופות קטן יותר, סביר להניח שההשפעה מהטעות האקראית של התק' הקודמת עדיין משפיעה גם היום.

$$\varepsilon_t = \rho\varepsilon_{t-1} + \underbrace{v_t}$$

הרכיב הזה מקיים את כל ההנחות הקלאסיות

① $E(v_t)=0\ \forall t$

② $Var(v_t)=\sigma_v^2\ \forall t$

③ $cov(v_t, v_{t-1})=0\ \forall t, t-1$

כאשר: $|\rho|<1$

($|\rho|<1$ ← כבר שמנו)

האם נשארו 3 התכונות שפרשנו ש ε_t מתקיימות:

יש בעיה ב-ε_t, הולכת לכאורה שהן לא מתקיימות, לכן נבדוק נס' לבדוק בעזרתם

מהן תכונות האומדים

נבדוק האם

① $E(\varepsilon_t)=0\ \forall i$

$$\rightarrow \varepsilon_t = \rho\varepsilon_{t-1} + v_t = \rho(\rho\varepsilon_{t-2} + v_{t-1}) + v_t = \rho^2\varepsilon_{t-2} + \rho v_{t-1} + v_t$$

$$= \rho^2(\rho\varepsilon_{t-3} + v_{t-2}) + \rho v_{t-1} + v_t = \underbrace{\rho^3\varepsilon_{t-3}} + \rho^2 v_{t-2} + \rho v_{t-1} + v_t$$

נמשיך הלאה אינסוף פעמים תקופות אחורה

$$\varepsilon_t = \underbrace{\rho^\infty\varepsilon_{t-\infty}}_{\text{מתקרב}} + \boxed{\sum_{i=0}^{\infty}\rho^i v_{t-i}}$$

ממוצע משוקלל של כל ההפרעות האקראיות מהיום ועד סוף תק' אחורה

$$E(\varepsilon_t) = E(0) + E\left(\sum_{i=0}^{\infty}\rho^i v_{t-i}\right) = \sum_{i=0}^{\infty}\rho^i \underbrace{E(v_{t-1})}_{0}$$

משתנה לא סטוכסטי (קבוע)

לכן מתקיים כי $E(\varepsilon_t)=0\ \forall i$.

נבדוק האם שונות קבועה מתקיימת:

2 $Var(\varepsilon_t) = ?$

$$Var\left(\sum_{i=0}^{\infty}\rho^i v_{t-i}\right) = E\left(\sum_{i=0}^{\infty}\rho^i v_{t-i}\right)^2 = \sum_{i=0}^{\infty}\rho^{2i}\, Var(v_{t-i}) + 2\sum_{i<j}\sum_{j=0}\dots$$

חוקי Var

$Var(ax) = a^2 Var\, x$

הביטוי הזה כולל את ה $cov\ v_{t-i}\, v_{t-j}$

מכיוון ש v_t אין מתאם סדרתי, כל הביטוי הזה מתבטל.

$$= \sigma_v^2 \cdot \sum_{i=0}^{\infty}\rho^{2i} = \boxed{\frac{\sigma_v^2}{1-\rho^2}}$$

משתמשים בהנחה של שונות קבועה עבור v_t

קיבלנו ש ε_t מקיים את הנחת השונות הקבועה כלומר השונות של ε_t קבועה.

3 למה שווה השונות המשותפת של $\varepsilon_t, \varepsilon_{t-1}$?

$$\to Cov(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-1}) = E(\varepsilon_t \cdot \varepsilon_{t-1}) \overset{\text{נציב}}{=} E((\rho\varepsilon_{t-1} + v_t)\cdot\varepsilon_{t-1})$$

$$= \rho\, Var\, \varepsilon_{t-1} + \underbrace{E(v_t \cdot \varepsilon_{t-1})}_{0} = \boxed{\rho \cdot Var\, \varepsilon_t}$$

שונות קבועה

ובאותו אופן:

$Cov(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-s}) = \rho^s\, Var\, \varepsilon_t$

$correlation(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-s}) = \rho^s$

אז מה הבעיה בעצם?

$y_t = \alpha + \beta x_t + v_t$

כאשר יש מתאם סדרתי מהסוג: $\varepsilon_t = \rho\varepsilon_{t-1} + v_t$

1. אין פגיעה בחוסר הטיה (או עקביות)
2. השונות לא מינימלית (אין יעילות)
3. האומדים לשונות מוטים ← מבחני השערות אינם ~~[illegible]~~ תקפים

$$① \quad \hat{\beta} = \beta + \frac{\sum(x_t-\bar{x})\varepsilon_t}{\sum(x_t-\bar{x})^2} = \beta + \frac{\sum(x_t-\bar{x})(\rho\varepsilon_{t-1}+v_t)}{\sum(x_t-\bar{x})^2}$$

$$= \beta + \underbrace{\frac{\rho\sum(x_t-\bar{x})\varepsilon_{t-1}}{\sum(x_t-\bar{x})^2}}_{} + \frac{\sum(x_t-\bar{x})v_t}{\sum(x_t-\bar{x})^2}$$

אפילו אם x לא סטוכסטי

אז כאשר $n\to\infty$ $\qquad n\to\infty$

$$= \beta + \rho\frac{Cov(x_t,\varepsilon_{t-1})}{Var(x_t)} + \frac{Cov(x_t,v_t)}{Var(x_t)}$$

$$\qquad \to 0 \qquad\qquad\qquad \to 0$$

* שימו לב: בשונות שיצאה הבעיה היתה שחשבנו שהביטוי כאן הוא כל השונות ($\sum e$)

ככה אמור להיות החישוב

$$③ \quad Var(\hat{\beta}) = E\left(\frac{\sum(x_t-\bar{x})\varepsilon_t}{\sum(x_t-\bar{x})^2}\right)^2 = \frac{\sum(x_t-\bar{x})^2 E(\varepsilon_t)^2}{\sum(x_t-\bar{x})^2} + \cancel{\ldots}$$

$$\rightarrow + 2\sum\sum\left[\frac{(x_t-\bar{x})(x_{t-s}-\bar{x})\,\varepsilon_t\varepsilon_{t-s}}{(x_t-\bar{x})^2\,(x_{t-s}-\bar{x})^2}\right]$$

** עיקר הבעיה היא כאן, אנחנו חושבים שהביטוי הזה מתאפס, למרות שבפועל הוא שונה מאפס.

זאת הסיבה שכל האומדים לשונויות של האומדים מוטים וכל מבחני השערות אינם רלוונטיים.

אבחון הבעיה: מבחן DW Durbin-Watson

אם חושבים שיש בעיה של מתאם סדרתי מסדר ראשון (AR(1))

נבצע מבחן המבוסס על השאריות $\hat{\varepsilon}_t$

$$DW=\frac{\sum_{t=2}^{T}(\hat{\varepsilon}_t-\hat{\varepsilon}_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^{T}(\hat{\varepsilon}_t^2)}=\frac{\overbrace{\sum_{2}^{T}\hat{\varepsilon}_t^2}^{\text{במדגם גדול}\to 1}+\overbrace{\sum_{2}^{T}\hat{\varepsilon}_{t-1}^2}^{\text{במדגם גדול}\to 1}-2\sum\hat{\varepsilon}_{t-1}\hat{\varepsilon}_t}{\sum_{1}^{T}\hat{\varepsilon}_t^2}$$

$$\cong 2-2\cdot\frac{\sum_{t=2}^{T}\hat{\varepsilon}_{t-1}\hat{\varepsilon}_t}{\sum_{1}^{T}\hat{\varepsilon}_t^2}\qquad \boxed{\cong 2(1-\hat{\rho})\cong DW}$$

$\hat{\rho}$ הינה

מהרגרסיה הבאה

$$\hat{\varepsilon}_t=\rho\cdot\hat{\varepsilon}_{t-1}+\epsilon_t$$

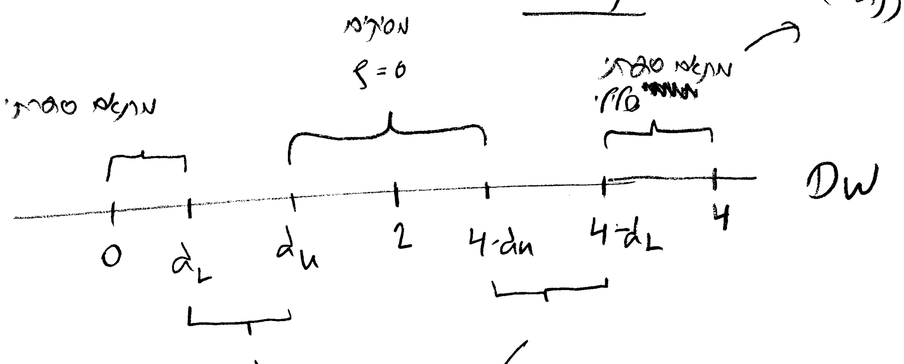
$\boxed{\text{רגרסיה ללא חותך}}$

$$\hat{\rho}=\frac{\sum\hat{\varepsilon}_{t-1}\hat{\varepsilon}_t}{\sum_{2}^{T}\hat{\varepsilon}_{t-1}^2}$$

אינטואיציה:

* אם $\hat{\rho}\to 1$ נקבל DW שואף לאפס ← ככל שהמתאם הסדרתי חזק וחיובי יותר אזי הסטטיסטי $\to 0$
* אם $\hat{\rho}\to -1$ ← $DW\to 4$

תחומים:



תחומים אפורים שבהם לא ניתן לקבוע האם יש מתאם סדרתי או לא.

* **הערה נוספת:** אין ממש טעם לבצע DW עבור נתוני רוחב.

איך מתקנים מתאם סדרתי?

אם אנחנו יודעים את ρ:

① $y_t = \alpha + \beta x_t + \varepsilon_t$

אופרטור Lag

$y_{t-1} = \alpha + \beta x_{t-1} + \varepsilon_{t-1} \quad | \cdot \rho \quad \rightarrow$ ② $\rho y_{t-1} = \rho\alpha + \rho\beta x_{t-1} + \rho\varepsilon_{t-1}$

נחסיר את ② מ ①:

$$① - ② = y_t - \rho y_{t-1} = \underbrace{\alpha(1-\rho)}_{\alpha^*} + \underbrace{\beta}_{\beta^*}(x_t - \rho x_{t-1}) + \underbrace{\varepsilon_t - \rho\varepsilon_{t-1}}_{v_t}$$

מבצע ואריאנט

β^* זהה ל β

אם יודעים את ρ, אין בעיה לאמוד משוואה כזאת.
ההפרש האקראי שלה מקיימת את כל ההנחות הקלאסיות.

האומדים יהיו עקיבים ויעילים אסימפטוטית.

איך מתקנים כאשר לא יודעים את ρ? שיטה איטרטיבית
cochrane-orcutt

1א. מנחשים את ρ ואומדים את α, β ממשוואה ①-②

ב. מכאן אנחנו מקבלים שאריות חדשות $\hat{\varepsilon}'_t$

2. באמצעות סדרת ה $\hat{\varepsilon}'_t$ אומדים את ρ מחדש.

3. אם מקבלים $\hat{\rho}$ שאינו מובהק $\rightarrow$ סיימנו!

ה. אם לא מקבלים $\hat{\rho}$ מובהק $\rightarrow$ מבצעים את התהליך שוב.

חוזר חלילה עד להתכנסות.

↓ להראות בגאנט עם עקומת פוספס/העקומה שלי (ההפרשים)

דוגמא 1

סדרה עיתית ← מודל סטטי: (t גם עבור חלוי ישום עבור ה"ח)

$$inf_t = \beta_0 + \beta_1 unemp_t + u_t$$ ← עקומת פיליפס.

inf_t – שיעור אינפלציה שנתי

$unemp_t$ – שיעור האבטלה

β_0 – סוג @ – שיעור אינפלציה טבעי

$DW = 0.8$
$\hat{\rho} = 0.573$
$t = 4.93$
יש מתאם סדרתי
גם עושה תיקון הולם שתיסר.

התיאוריה הקלאסית אומרת שיש קשר **שלילי** בין אינפלציה לאבטלה.

ⓐ מודלים רגרסיה @ $inf = f(unem)$

מקדם השיפוע חיובי ולא מובהק.

② לכן עוברים ל: Expectations Augmented Phillips Curve:

$$\underbrace{inf_t - inf_t^e}_{\text{unanticipated inflation}} = \beta_1(unem_t - \mu_0) + \varepsilon_t$$

הנחת פיליפס'ה שהאינפלציה תהיה בשנה הבאה כמו השנה.

$$inf_t^e = inf_{t-1}$$

$DW = 1.76$
$\hat{\rho} = -0.036$
$t = -0.297$
אין מתאם סדרתי

לכן נאמוד את המודל:

$$\Delta inf_t = \underbrace{\beta_0}_{-\beta_1 \mu_0} + \beta_1 unemp_t + \varepsilon_t$$

$$5.6\% \approx \mu_0 = \frac{\hat{\beta}_0}{-\hat{\beta}_1} \Leftarrow \boxed{-\beta_1 \mu_0}$$

אמורים לקבל תוצאה חיובית כיוון ש $\mu_0 > 0$

$\beta_1 < 0$ ← אמור להיות

-0.543

כלומר ← אחוז 1 עליה בשיעור אבטלה מוריד את שיעור האינפלציה הלא צפויה בסביבות חצי אחוז.

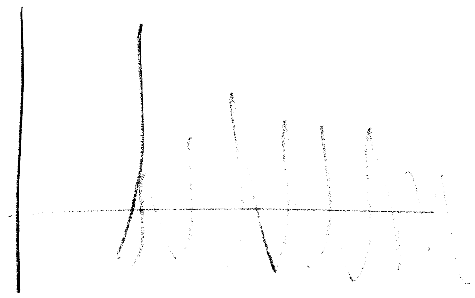
והמקדם הזה מובהק (0.0227 P)

בונוס 2 איך רואים שהמתאם רחב

(בונוס מעניין) אין הטיה של מתאם ספציפי: קיים ב wage1

מריצים רגרסיה של wage על educ.

מקבלים:



הערה לגבי מתאם סדרתי: (ברמה המעשית)

הרבה פעמים קורה שהמודל האמיתי הוא כזה:

$$y_t = \alpha + \beta x_t + \gamma y_{t-1} + \varepsilon_t$$

אבל לא אומדים עם y_{t-1}

המודל הנאמד

$$y_t = \alpha + \beta x_t + \varepsilon'_t$$

$$\varepsilon'_t = \varepsilon_t + \gamma y_{t-1}$$

במקרים כאלה גם אפשר לקבל מתאם סדרתי בהפרעות האקראיות:

$$\cancel{cov(\varepsilon'_t, \varepsilon'_{t-1}) = cov(\varepsilon_t + \gamma y_{t-1}, \varepsilon_{t-1} + \gamma y_{t-2})}$$

אבל הוא יסתדר אם נוסיף y_{t-1} לרגרסיה.

הבעיה היא דינית אם מוסיפים y_{t-1} עדיין

מתקבל של מתאם סדרתי.