שיעור מס' 3:

* נקודת המוצא שלנו היא מודל סטטי → תופעה כלכלית (Y) שבאה לידי ביטוי במשתנים כלכליים (X).

* נשאל מהם המשתנים המסבירים את ההשתנות של Y.

<u>שלב I</u> * נרצה לבחור מעט ככל האפשר משתנים שמסבירים את Y. $Y=f(\ldots)$

* <u>דוגמא:</u> אינפלציה Y. אם נרצה משתנה מסביר אחד → X → גרעון ממשלתי. בדרך כלל יהיו יותר משתנים מסבירים, אך בשלב הזה נסתפק באחד.

* <u>אינטואיציה:</u> אם אני אומר שאינפלציה מושפעת מ-20 משתנים, לא עשיתי יותר מדי. המטרה של מודלים → לפשט את המציאות.

$\boxed{\text{להסביר כמה שיותר עם כמה שפחות}}$

<u>שלב II</u> * מה הצורה הפונקציונלית → בשלבים הראשונים נניח קשר ליניארי.

$$\overset{\text{תלוי}}{Y_i} = \alpha + \beta \overset{\text{בת}}{X_i} + \varepsilon_i$$

ההשפעה השולית של X על Y.

הפרעה <u>אקראית</u> (disturbance)

* <u>למה יש לנו ε_i</u> → X אינו מסוגל להסביר את Y_i במלואו. אך מצד שני אי אפשר להסביר תופעה במלואה, תמיד יש טעות משהו.

α,β - <u>הפרמטרים</u> של המודל שרוצים <u>לאמוד</u>

σ^2_ε - השונות של ε. זהו פרמטר נוסף שנרצה לאמוד למרות שלא רואים אותו במשוואה.

<u>הנחה שנייה:</u> אנחנו מניחים שהמודל הוא נכון, <u>כלומר</u> → מניחים שבטבע באמת Y_i מוגדר ע"י מכונה (α,β), בהינתן X מתקבל בממוצע $Y_i=\alpha+\beta X$ ועוד הפרעה שמגרילה את ε_i.

* בהמשך נלמד מה קורה אם ההנחה הזו לא מתקיימת.

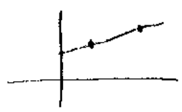
מה המטרה שלנו? בהינתן ההנחה שזהו המודל הנכון, נרצה
לראות איך לאמוד את α, β, σ_ε^2
בשיטה שנותנת אומדים "טובים"

בואו נבין קודם מהי המשמעות של ε_i ← בשביל זה נקח דוגמא.

ε_i - כל הגורמים שמשפיעים על Y_i אבל לא שייכים למשתנים המסבירים - x-ים. ← המון גורמים קטנים שממוצע שווה ל-0.

אם ε_i לא היה קיים לא היינו צריכים לאמוד את α, β.

מודל "דטרמיניסטי" ← מספיקות לי שתי תצפיות כדי למצוא את הפרמטרים.

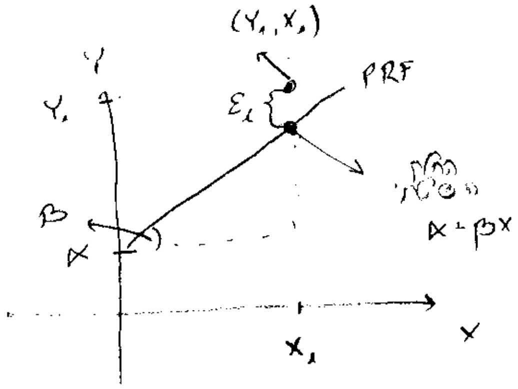


"המציאות" לא דטרמיניסטית.

ε_i הוא משתנה מקרי ⇐ Y_i הוא משתנה מקרי.

דוגמא ל-ε_i: נניח שמדברים על פונקציית ייצור: Y ← תפוקה
X ← גז׳

ε_i יכול להיות הפסקת חשמל, עובדים חולים ←
אלו גורמים שמשפיעים על הייצור בפועל אבל הם אינם שיטתיים.
כל מה ששיטתי קשור ל-α ו-β.



נראה זאת גרפית:
התצפית בפועל לא נמצאת על הקו.

חשוב: אני לא רואה את α, β, גם לא את ε_i.
כל מה שאנחנו נראה יהיה x-ים ו-y-ים של המדגם.
אנחנו נרצה לאמוד את α, β באמצעות מדגם של x-ים ו-y-ים.

מהו מדגם? אוסף נקודות מסביב ל-PRF ← α+βx.

המודל האמיתי: $Y_i = \alpha + \beta X_i + \varepsilon_i$

מה אנחנו רואים:

נרצה ליצור משוואה ← מה רואים:

$Y_i = \hat{\alpha} + \hat{\beta} X_i + \hat{\varepsilon}_i$

← אומדים לפרמטרים.

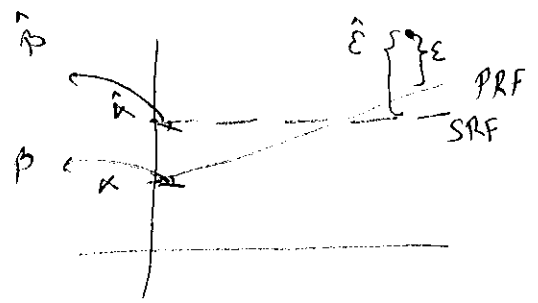
סטיה מן הקו, כמו ל-ε_i!

(12)

(I)

חשוב שנשתמש בנתונים

אנחנו נציע שיטה סטטיסטית שתתן לנו אומדים "טובים".



לא רואים → $Y_i = \alpha + \beta X_i + \varepsilon_i$

אומדים Y_i → $Y_i = \hat\alpha + \hat\beta X_i + \hat\varepsilon_i$

"טובים" ← התכונות של האומדים יהיו בהתאם להנחות של ε ושל שיטת האומדן.

ההנחות הקלאסיות:

השינוי לא קריטי. מה שחשוב הוא שהתוחלת זהה לכל X. ← (1) $E(\varepsilon_i) = 0$ $\forall i$ → אם היו לנו תצפית על כל האוכלוסיה, אז הממוצע של ε_i היה 0. בעצם ה SRF עובר באמצע. אם היה לנו את ה PRF היינו בממוצע צודקים בתחזית.

לאנשים שם אם יש זהים רוצה להיות ε שונה.

(2) $COV(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0$ $\forall i,j$ $(=E(\varepsilon_i\varepsilon_j))$ → ההפרעה המקרית של משפחה אחת לא מתואמת עם ההפרעה המקרית של משפחה אחרת. אין קשר סטטיסטי ליניארי.

חשוב ב Cross section

הומוסקדסטיות (3) $Var(\varepsilon_i)(=E(\varepsilon_i^2)) = \sigma_\varepsilon^2$ $\forall i$ → "הומוסקדסטי"

Homoscedasticity

(4) $\varepsilon_i \sim N$!

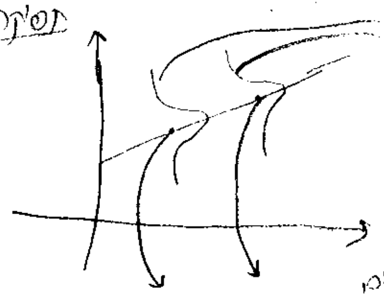
איך רואים את הנחות (1) ו-(3)?

$\boxed{\text{(5) X משתנה לא מקרי}}$

↓

עושים את ההנחה הזו כאילו הנסיין שולט במשתנה הבלתי תלוי או כאילו לוקחים מדגמים רבים

תפוקה = Y



(3) σ_ε^2 = for x_i and x_j

$E(Y|X) = \alpha + \beta X + \underline{0}$

X = עובדים

(1) $E(x_i) = E(Y_j) = 0$

למה הנחה (1) לא קריטית שזה 0? נניח ששווה ל $E(\varepsilon_i) = \alpha'$

אפשר לכתוב: $Y_i = \alpha + \beta X_i + \varepsilon_i + (\alpha' - \alpha')$

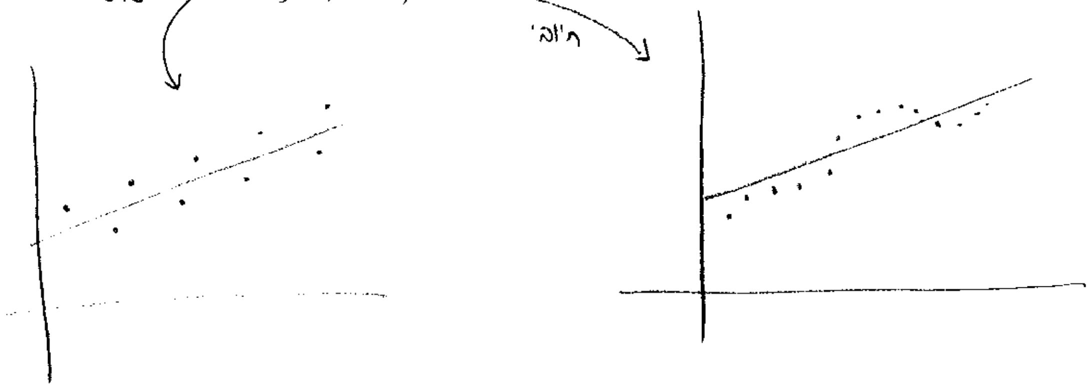
$= Y_i = \underbrace{(\alpha + \alpha')}_{\alpha^*} + \beta X_i + \underbrace{(\varepsilon_i - \alpha')}_{\varepsilon_i^*}$ → $E(\varepsilon_i^*) = 0$

מה בעצם אומרת הנחה 4?

מתאם סטטיסטי:

שלילי

חיובי



מונח ה Ceteris Paribus :

"other relevant factors being equal"

אנחנו בעצם אומרים שהתוצאה Y איננה תלויה בגורמים אחרים.

אם ניקח את הדוגמא של שכר והשכלה אנחנו בעצם מניחים שהתוצאה להשכלה לא תלויה בגורמים אחרים כמו ניסיון, גיל, מוצא וכו'.

במקרה הזה אנחנו אומרים שהניתוח שלנו מבטא [illegible] השפעה סיבתית (האמיתית) ולא קורלציה, למרות שהתעלמנו משתנים אחרים.

אמידה (estimation)

שיטת אמידה OLS ← Ordinary Least Squares

רוצים קו $Y=\hat{\alpha}+\hat{\beta}X$ שהוא קירוב טוב לקו הנתוני נראה אמיתי $Y=\alpha+\beta X$

$$Y_i=\hat{\alpha}+\hat{\beta}X_i+\hat{\varepsilon}_i$$

$$\Rightarrow \hat{\varepsilon}_i=Y_i-\hat{\alpha}-\hat{\beta}X_i=Y_i-\hat{Y}_i$$

* המינוס נגזרת פנימית כפי

ה OLS מחפש $\hat{\beta},\hat{\alpha}$ שייתן לנו: $\min_{\hat{\alpha},\hat{\beta}}\sum_{i=1}^{n}\hat{\varepsilon}_i^2$

$$=\hat{\varepsilon}_1^2+\hat{\varepsilon}_2^2+\hat{\varepsilon}_3^2+\dots+\hat{\varepsilon}_n^2$$

$$=\min_{\hat{\alpha},\hat{\beta}}\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i-\hat{\alpha}-\hat{\beta}X_i\right)^2$$

התנאים הנדרשים

① $\frac{\partial\,-}{\partial\hat{\alpha}}=2\cdot(-1)\cdot\sum_{i=1}^{n}\underbrace{\left(Y_i-\hat{\alpha}-\hat{\beta}X_i\right)}_{\hat{\varepsilon}_i}=0$ → משוואה נורמלית ראשונה $\sum\hat{\varepsilon}_i=0$

② $\frac{\partial\,-}{\partial\hat{\beta}}=2\cdot(-1)\sum_{i=1}^{n}\left[\underbrace{\left(Y_i-\hat{\alpha}-\hat{\beta}X_i\right)}_{\hat{\varepsilon}_i}X_i\right]=0$ → משוואה נורמלית שנייה $\sum\hat{\varepsilon}_iX_i=0$

① $\sum Y_i-n\hat{\alpha}-\hat{\beta}\sum X_i=0$

$$\Rightarrow n\hat{\alpha}=n\bar{Y}-\hat{\beta}n\bar{X}\Rightarrow\boxed{\hat{\alpha}=\bar{Y}-\hat{\beta}\bar{X}}$$

עב

② $\sum\left(Y_i-\bar{Y}+\hat{\beta}\bar{X}-\hat{\beta}X_i\right)X_i=0$

$$\Rightarrow\sum\left(Y_i-\bar{Y}\right)X_i-\hat{\beta}\sum\left(X_i-\bar{X}\right)X_i=0\Rightarrow\hat{\beta}\sum\left(X_i-\bar{X}\right)^2=\sum\left(Y_i-\bar{Y}\right)\left(X_i-\bar{X}\right)$$

$$\Rightarrow\hat{\beta}=\frac{\sum\left(Y_i-\bar{Y}\right)\left(X_i-\bar{X}\right)}{\sum\left(X_i-\bar{X}\right)^2}=\frac{\hat{Cov}(X,Y)}{\hat{Var}(X)}=\frac{\hat{\sigma}_{XY}}{\hat{\sigma}_X^2}$$

הרעיון שמאחורי המשוואות הנורמליות:

① $\sum \hat{\varepsilon}_i \rightarrow$ מעין "חיקוי" של מה שקרה באוכלוסיה. מניחים שהסכום של ε

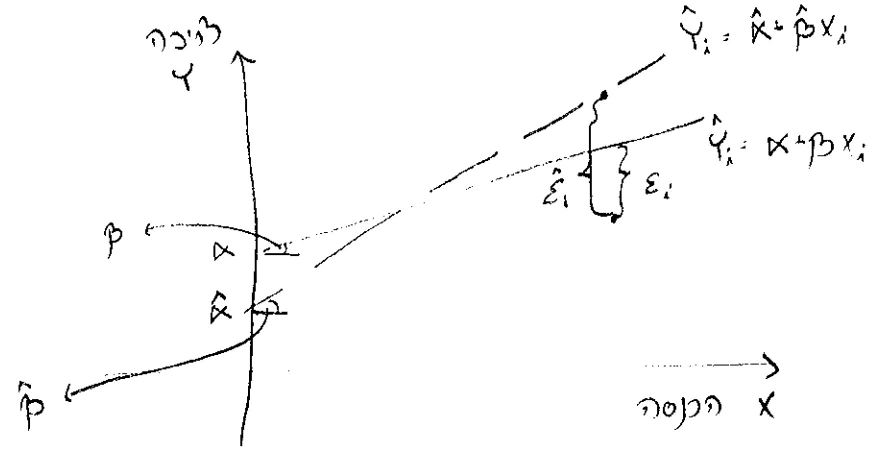
② $\sum \hat{\varepsilon}_i x_i = 0 \rightarrow$ אין מתאם בין ה $\hat{\varepsilon}$ לבין ה xים.

חומר למחשבה:

למה בוחרים $\min \sum \hat{\varepsilon}_i^2$ ולא ב $\min \sum |\hat{\varepsilon}_i|$?

שעור מס' 4 : (יד)

תזכורת :



$\beta \leftarrow$ (נט"ה שולית לצריכה)

↓

פרשנות כלכלית

OLS → ordinary least squares

* יכולנו לחשב אומדים אחרים $\min \sum |\hat{\varepsilon}_i|$ ←

$$\min_{\hat{\alpha},\hat{\beta}} \sum \hat{\varepsilon}_i^2 \Rightarrow \hat{\alpha} = \bar{Y} - \hat{\beta}\bar{X} \longrightarrow \bar{Y} = \hat{\alpha} + \hat{\beta}\bar{X} \; *$$

$$\hat{\beta} = \frac{\sum (x_i - \bar{x})(Y_i - \bar{Y})}{\sum (x_i - \bar{x})^2}$$

① $\hat{cov}$ לא אומר מי משפיע על מי! אם היינו מריצים רגרסיה הפוכה... $\Leftarrow \frac{\hat{Cov}(x,y)}{\hat{Var}(x)}$

② נראה את הקשר בין $\hat{\beta}$ לבין β :

* מציבים את Y_i האמיתי, תרגיל תיאורטי

$$\hat{\beta} = \frac{\sum (x_i - \bar{x}) Y_i}{\sum (x_i - \bar{x})^2} =$$

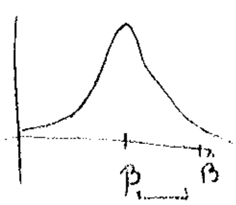
$$= \frac{\sum (x_i - \bar{x})(\alpha + \beta x_i + \varepsilon_i)}{\sum (x_i - \bar{x})^2} = \frac{\cancel{\sum (x_i - \bar{x})\alpha} + \sum (x_i - \bar{x})\beta x_i + \sum (x_i - \bar{x})\varepsilon_i}{\sum (x_i - \bar{x})^2}$$

$$\hat{\beta} = \beta \frac{\sum (x_i - \bar{x}) x_i}{\sum (x_i - \bar{x})^2} + \frac{\sum (x_i - \bar{x})\varepsilon_i}{\sum (x_i - \bar{x})^2} =$$

$$\Rightarrow \boxed{\hat{\beta} = \beta + \frac{\sum (x_i - \bar{x})\varepsilon_i}{\sum (x_i - \bar{x})^2}}$$

לא יודע להגיד [illegible]

→ האומד הוא הפרמטר + קומבינציה לינארית של ההפרעות האקראיות



הטיה $\frac{\sum (x_i - \bar{x})\varepsilon_i}{\sum (x_i - \bar{x})^2}$

16 נראה את הקשר בין $\hat{\alpha}$ לבין α:

$$\hat{\alpha} = \bar{Y} - \hat{\beta}\bar{X}$$

במקום

$$\hat{\alpha} = \frac{\sum(\alpha + \beta x_i + \varepsilon_i)}{n} - \hat{\beta}\cdot\frac{\sum x_i}{n}$$

$$= \frac{\sum\alpha}{n} + \frac{\sum\beta x_i}{n} + \frac{\sum\varepsilon_i}{n} - \hat{\beta}\cdot\frac{\sum x_i}{n}$$

$$= \alpha + \beta\cdot\frac{\sum x_i}{n} + \frac{\sum\varepsilon_i}{n} - \hat{\beta}\cdot\bar{x}$$

$$= \alpha + \frac{\sum\varepsilon_i}{n} - \bar{x}(\hat{\beta}-\beta) = \alpha + \frac{\sum\varepsilon_i}{n} - \bar{x}\left(\frac{\sum(x_i-\bar{x})\varepsilon_i}{\sum(x_i-\bar{x})^2}\right)$$

$$= \alpha + \sum\left(\frac{\varepsilon_i}{n} - \bar{x}\frac{(x_i-\bar{x})\cdot\varepsilon_i}{\sum(x_i-\bar{x})^2}\right) = \alpha + \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{n} - \frac{\bar{x}(x_i-\bar{x})}{\sum(x_i-\bar{x})^2}\right)\varepsilon_i$$

עד עכשיו לא השתמשנו בהנחות הקלאסיות:

1. $E(\varepsilon_i) = 0 \quad \forall i$
3. $E(\varepsilon_i^2) = \sigma_\varepsilon^2 \quad \forall i$
2. $Cov(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0 \quad \forall i \neq j$
4. * $\varepsilon_i \sim N(\quad)$
5. * x משתנה לא מקרי

נשתמש בשביל לדבר על תכונות האומדים

!. יקירי נראה שהכל גימגום תחת הנ"ה :

צ"ל: $E(\hat\beta)=\beta$

$$E(\hat\beta)=E\left(\beta+\frac{\sum(x_i-\bar x)\varepsilon_i}{\sum(x_i-\bar x)^2}\right)=E(\beta)+E\Bigg(\frac{\sum(x_i-\bar x)\varepsilon_i}{\underbrace{\sum(x_i-\bar x)^2}_{\text{קבוע כי מקבע}}}\Bigg)$$

$$=\beta+\frac{1}{\sum(x_i-\bar x)^2}\cdot E\Big(\underbrace{\sum(x_i-\bar x)}_{\text{קבוע כי מקבע X.}}\varepsilon_i\Big)=\beta+\frac{\sum(x_i-\bar x)\overbrace{E(\varepsilon_i)}^{=0\ \text{הנחה ①}}}{\sum(x_i-\bar x)^2}$$

$$=\beta\ \blacksquare$$

צ"ל: $E(\hat\alpha)=\alpha$

$$E(\hat\alpha)=E\left(\alpha+\sum\left(\frac{1}{n}-\frac{\bar x(x_i-\bar x)}{\sum(x_i-\bar x)^2}\right)\varepsilon_i\right)$$

$$=E(\alpha)+E\left(\sum\left(\frac{1}{n}-\frac{\bar x(x_i-\bar x)}{\sum(x_i-\bar x)^2}\right)\varepsilon_i\right)$$

$$=\alpha+\sum\left(\frac{1}{n}-\frac{\bar x(x_i-\bar x)}{\sum(x_i-\bar x)^2}\right)E(\varepsilon_i)=\alpha\ \blacksquare$$

עכשיו נחשב את השונות שהיא:

שונות השיפוע:

$$Var(\hat{\beta}) = E(\hat{\beta} - \underset{\text{חסר הטיה}}{E(\hat{\beta})})^2 = E(\hat{\beta} - \beta)^2 = E\left(\frac{\sum(x_i - \bar{x})\varepsilon_i}{\sum(x_i - \bar{x})^2}\right)^2$$

משתמשים בהנחת חוסר סטוכסטיות של x

$$= \left(\frac{1}{\sum(x_i - \bar{x})^2}\right)^2 \cdot E\left(\sum(x_i - \bar{x})\varepsilon_i\right)^2 = E\Big((x_1 - \bar{x})^2\varepsilon_1^2 + (x_2 - \bar{x})^2\varepsilon_2^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2\varepsilon_n^2$$
$$+ 2(x_1 - \bar{x})(x_2 - \bar{x})\varepsilon_1\varepsilon_2$$
$$+ 2(x_2 - \bar{x})(x_3 - \bar{x})\varepsilon_2\varepsilon_3\Big)$$
$$+ \dots$$

$$= \left(\frac{1}{\sum(x_i - \bar{x})^2}\right)^2 \cdot E\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2\varepsilon_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n}(x_i - \bar{x})(x_j - \bar{x})\varepsilon_i\varepsilon_j\right)$$

עכשיו נשתמש שוב בהנחת חוסר הסטוכסטיות הזו:

$$= \left[\frac{1}{\sum(x_i - \bar{x})^2}\right]^2 \cdot \left[\sum(x_i - \bar{x})^2 \underbrace{E(\varepsilon_i^2)}_{Var\,\varepsilon} + 2\sum\sum(x_i - \bar{x})(x_j - \bar{x})\underset{=0}{E(\varepsilon_i\varepsilon_j)}\right]$$

לפי הנחה $Cov(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0$ לכל $i \neq j$

$$= \frac{\sigma_\varepsilon^2 \cdot \cancel{\sum(x_i - \bar{x})^2}}{\left(\sum(x_i - \bar{x})^2\right)^{\cancel{2}}} + 0 = \boxed{\frac{\sigma_\varepsilon^2}{\sum(x_i - \bar{x})^2}}$$

■

אינטואיציה לשונות:

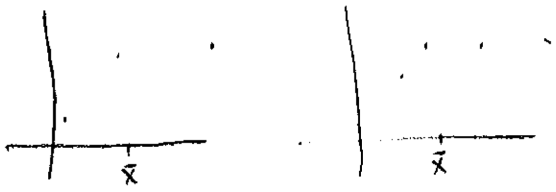
מה קובע את הפיזור של $\hat{\beta}$ מסביב ל-β?

① השונות של ε – משהו מהטבע, לא תלוי בנו

$\sigma_{\varepsilon_2}^2 > \sigma_{\varepsilon_1}^2$

יש יותר "רעש"

② הפיזור של ה-x-ים:
(כמה x-ים מתפזרים סביב $\bar{x}$)



חשוב על מקרה קיצוני – כל התצפיות על $\bar{x}$ – אינסוף קווים

$$Var(\hat{\alpha}) = E\left(\sum\left(\frac{1}{n} - \frac{\bar{x}(x_i-\bar{x})}{\sum(x_i-\bar{x})^2}\right)\varepsilon_i\right)^2$$

$\rightarrow E(\hat{\alpha} - E(\hat{\alpha}))^2$

סימון:

משקלות קבועי לכל i

$$\text{משקלות} \leftarrow h_i = \left(\frac{1}{n} - \frac{\bar{x}(x_i-\bar{x})}{\sum(x_j-\bar{x})^2}\right)$$

$$Var(\hat{\alpha}) = E\left(\sum h_i\varepsilon_i\right)^2 = E\Big(\sum^n h_i^2\varepsilon_i^2 + 2\sum\sum h_ih_j\underbrace{\varepsilon_i\varepsilon_j}_{0 \text{ בהנחה}}\Big)$$

$$= \sum h_i^2 E(\varepsilon_i^2) + \cancel{2\sum\sum h_ih_j E(\varepsilon_i\varepsilon_j)}_{0}$$

$$= \sigma_\varepsilon^2 \cdot \sum h_i^2 = \sigma_\varepsilon^2 \cdot \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{N} - \frac{\bar{x}(x_i-\bar{x})}{\sum(x_j-\bar{x})^2}\right)^2$$

$$= \sigma_\varepsilon^2 \sum_{i=1}^n\left(\frac{1}{N^2} + \frac{\bar{x}^2(x_i-\bar{x})^2}{\left(\sum(x_j-\bar{x})^2\right)^2} - 2\cdot\frac{1}{N}\cdot\frac{\bar{x}(x_i-\bar{x})}{\sum(x_i-\bar{x})^2}\right)$$

$$= \sigma_\varepsilon^2 \cdot \left(\frac{N}{N^2} + \frac{\bar{x}^2\cancel{\sum(x_i-\bar{x})^2}}{\left(\sum(x_i-\bar{x})^2\right)^{\cancel{2}}} - \cancel{\frac{2}{N}\frac{\bar{x}\sum(x_i-\bar{x})}{\sum(x_i-\bar{x})^2}}_{0}\right)$$

$$= \sigma_\varepsilon^2\left(\frac{1}{N} + \frac{\bar{x}^2}{\sum(x_i-\bar{x})^2}\right)$$

אפשר גם להמשיך לפנים:

$$Var(\hat{\alpha}) = \sigma_\varepsilon^2\left(\frac{\sum(x_i-\bar{x})^2 + n\bar{x}^2}{n\sum(x_i-\bar{x})^2}\right) = \sigma_\varepsilon^2\left(\frac{\sum x_i^2 + n\bar{x}^2 - 2\sum x_i\bar{x} + n\bar{x}^2}{n\sum(x_i-\bar{x})^2}\right)$$

$$= \sigma_\varepsilon^2 \cdot \left(\frac{\sum x_i^2 + \cancel{n\bar{x}^2} - 2\bar{x}\cdot n\bar{x} + \cancel{n\bar{x}^2}}{n\sum(x_i-\bar{x})^2}\right) = \boxed{\frac{\sigma_\varepsilon^2 \sum x_i^2}{n\sum(x_i-\bar{x})^2}}$$

ככל ש$\hat{\beta}$ מב"ן יותר ← $\hat{\alpha}$ מב"ן יותר

סיכום ביניים:

יש לנו אומד לחותך ואומד לשיפוע

$$\hat{\beta} = \frac{\sum (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\sum (X_i - \bar{X})^2} \qquad \hat{\alpha} = \bar{Y} - \hat{\beta}\bar{X}$$

$$\sigma^2_{\hat{\beta}} = \frac{\sigma^2_{\varepsilon}}{\sum (X_i - \bar{X})^2} \qquad \sigma^2_{\hat{\alpha}} = \underbrace{\sigma^2_{\varepsilon}}_{\text{לא ידועים}} \left(\frac{1}{N} + \frac{\bar{X}^2}{\sum (X_i - \bar{X})^2} \right)$$

לא ידועים

לכן נחפש אומד לשונות של האומדים. (בשביל מבחני השערות)

$$\sigma^2_{\varepsilon} = E(\varepsilon_i - E(\varepsilon_i))^2 \longrightarrow \hat{\sigma}^2_{\varepsilon} = \frac{\sum (\hat{\varepsilon}_i - \bar{\hat{\varepsilon}})^2}{\underbrace{N-2}_{\text{כדי שהאומד יהיה חסר הטיה}}}$$

$\bar{\hat{\varepsilon}} = 0 \rightarrow$ ממשוואה נורמלית

$$\Rightarrow \hat{\sigma}^2_{\varepsilon} = \frac{\sum \hat{\varepsilon}_i^2}{n-2}$$

(*) זכור 2 ההפרש למשוואות הנורמליות
קומבינציות לינאריות התלויות

לכן האומדים לשונות של האומדים:

$$\hat{Var}(\hat{\beta})\ \hat{\sigma}^2_{\hat{\beta}} = \frac{\frac{\sum \hat{\varepsilon}_i^2}{n-2}}{\sum (X_i - \bar{X})^2} \qquad \hat{Var}(\hat{\alpha}) = \hat{\sigma}^2_{\hat{\alpha}} = \frac{\sum \hat{\varepsilon}_i^2}{n-2} \cdot \left[\frac{1}{N} + \frac{\bar{X}^2}{\sum (X_i - \bar{X})^2} \right]$$